1^{er} Curso de Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación. Curso 2018-19.

Matemáticas I. Departamento de Matemática Aplicada II. Universidad de Sevilla.

Primera Convocatoria. 21 de Enero de 2019.

Ejercicio 1.

1. [2 pto] Calcule, en notación compleja y en notación real, las ecuaciones de la simetría respecto de la recta que pasa por $(0,1)$ con pendiente 2. Si $z = x + iy$ es un punto arbitrario y $w = u + iv$ es el simétrico de z, se pide:
   (a) Notación compleja: $w = F(z)$.
   (b) Notación real $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$.

2. [1 pto] ¿Para qué valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$ es $(1+i)^n$ un número real positivo? Razone su respuesta geométricamente.

3. Calcule en forma exponencial, binómica y gráfica las cuatro raíces cuartas de $a = -16i$:
   (a) [1 pto] Forma exponencial.
   (b) [1 pto] Forma binómica, para ello use los valores

$$\cos(3\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \operatorname{sen}(3\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

   (c) [1 pto] Gráficamente. Se pide representarlas de manera precisa junto a las raíces cuartas de 1.

4. [4 pto] (**Teoría**) Sean $\{z_0, z_1, \ldots, z_{N-1}\}$ las raíces N-ésimas de 1. Consideramos los vectores

$$Z_k = \begin{bmatrix} z_0^k \\ z_1^k \\ \vdots \\ z_{N-1}^k \end{bmatrix}, \; k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

   Demuestre que los vectores $\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_{N-1}\}$ son ortogonales entre sí y tienen norma $\sqrt{N}$.

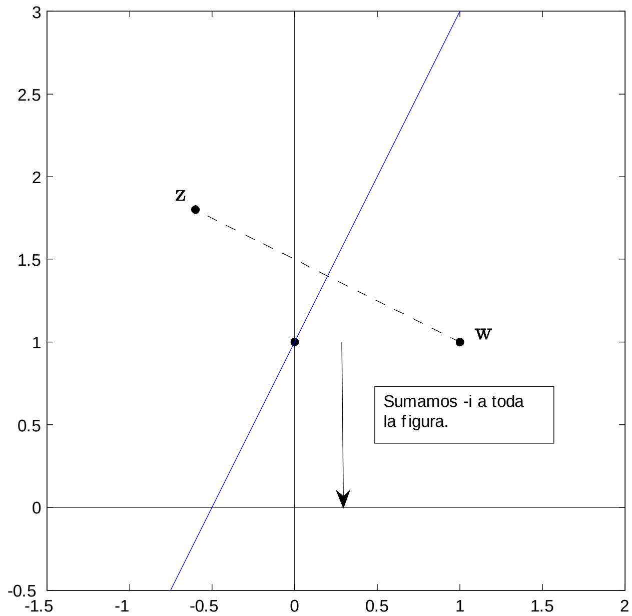
Solución.

1. Dibujamos en el plano complejo la recta junto con un punto genérico $z \in \mathbb{C}$ y su simétrico w respecto de dicha recta. Llamemos F_1 a esta primera figura. Si restamos i a todos los puntos de la figura F_1 entonces observaremos que el punto $z - i$ se transformará en el punto $w - i$ mediante una simetría respecto de una recta que pasa por 0 con pendiente 2. Llamemos F_2 a esta nueva figura. Tomamos un vector director cuya pendiente sea 2, por ejemplo el vector $(1, 2)$. Este vector forma un ángulo θ con el eje real positivo. A continuación giramos (con centro 0) la figura F_2 un ángulo $-\theta$ para obtener finalmente una figura que llamamos F_3. Sabemos que la multiplicación por $e^{-i\theta}$ produce ese giro, por lo tanto los puntos obtenidos en la figura F_3 son $(z - i)\, e^{-i\theta}$ y $(w - i)\, e^{-i\theta}$. La recta original se habrá transformado al final en el eje real mientras que los puntos z y w se habrán transformado en dos puntos simétricos respecto del eje real y por lo tanto uno es el conjugado del otro:

$$(w - i)\, e^{-i\theta} = \overline{(z - i)\, e^{-i\theta}}.$$

   Si aplicamos las propiedades de la conjugación y despejamos w de la ecuación anterior se obtiene

$$w = i + \left(e^{i\theta}\right)^2 (\overline{z} + i) = F(z).$$



El ángulo θ no lo conocemos, a no ser que usemos una calculadora, pero tampoco lo necesitamos ya que

$$1+2i = re^{i\theta} = \sqrt{5}e^{i\theta} \Rightarrow e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(e^{i\theta}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(-3+4i\right).$$

Sustituyendo $z = x+iy$, $w = u+iv$ podremos obtener las funciones $u = f\left(x,y\right)$, $v = g(x,y)$:

$$w = u+iv = i + \frac{1}{5}\left(-3+4i\right)\left(x-iy+i\right)) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-3x+3y-3+i\left(4x+4y+1\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u\left(x,y\right) = \frac{1}{5}\left(-3x+3y-3\right), \quad v\left(x,y\right) = \frac{1}{5}\left(4x+4y+1\right).$$

2. Cuando se multiplican dos números complejos se obtiene un nuevo número complejo cuyo radio es el producto de los dos radios y cuyo ángulo es la suma de los dos ángulos. Como el ángulo del número $1+i$ es $\pi/4$, es decir, la octava parte de una circunferencia completa, necesitaríamos multiplicarlo 8 veces por sí mismo para obtener un número real positivo. Con cualquier potencia múltiplo de 8 ocurriría lo mismo.

3. Si $a = re^{i\theta}$ y queremos obtener las raíces cuartas de a debemos obtener en primer lugar $w_0 = r^{1/4}e^{i\theta/4}$. Sabemos que las raíces cuartas del número complejo $a = re^{i\theta}$ son el resultado de multiplicar por w_0 las cuatro raíces cuartas de 1. Expresamos $a = -16i$ en forma exponencial para obtener el número w_0:

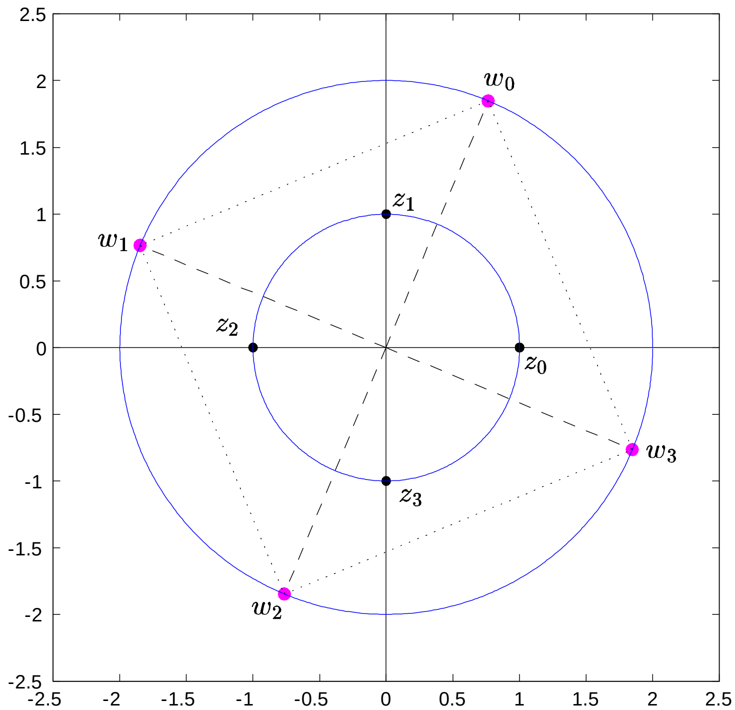
$$a = 16e^{i3\pi/2} \Rightarrow w_0 = 2e^{i3\pi/8} = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Las otras tres raíces se obtienen multiplicando w_0 por las otras tres raíces cuartas de 1:

$$w_1 = w_0 z_1 = 2e^{i3\pi/8}e^{i2\pi/4} = 2e^{i7\pi/8} = iw_0 = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$w_2 = w_0 z_2 = 2e^{i3\pi/8}e^{i4\pi/4} = 2e^{i11\pi/8} = -w_0 = -\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

$$w_3 = w_0 z_3 = 2e^{i3\pi/8}e^{i3\pi/2} = 2e^{i15\pi/8} = -iw_0 = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$



4. La demostración de esta propiedad se puede encontrar en los apuntes de la asignatura.

Ejercicio 2. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. [2 pto] Determine el vector v que verifica $A = -I + vv^T$.

2. [2 pto] Imponga la condición $\left(-I + vv^T\right)\left(-I + \alpha vv^T\right) = I$ para determinar el valor de α tal que la inversa de A es $-I + \alpha vv^T$. Para realizar este apartado se pide razonar en esta *notación compacta*, mencionando expresamente las propiedades de las operaciones entre matrices (asociativa, etc) que se estén usando en cada paso. No se puntuará este apartado si se razona con los valores extendidos de las matrices. Deduzca el valor de α en el caso en que A se extienda a una matriz de orden n.

3. [2 pto] Considere la matriz $B = vv^T$, donde v es el vector del primer apartado. Calcule los autovalores de B sin calcular el polinomio característico, simplemente usando propiedades generales de autovalores.

4. [2 pto] Usando los apartados anteriores y las propiedades generales de los autovalores, calcule los autovalores de A junto con sus multiplicidades algebraicas y geométricas.

5. [2 pto] Usando los apartados anteriores, las propiedades generales de los autovalores y la teoría de las matrices simétricas reales, encuentre una matriz ortogonal P (o sea $P^{-1} = P^T$) y una diagonal real D tales que $\left(A^2 - 3A - I\right)^{-1} = PDP^T$.

Solución.

1. Es obvio que $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

2. Calculamos

$$\left(-I + vv^T\right)\left(-I + \alpha vv^T\right) \underset{(1)}{=} I - \alpha vv^T - vv^T + \alpha\left(vv^T\right)\left(vv^T\right) \underset{(2)}{=}$$

$$= I - (\alpha + 1)\, vv^T + 4\alpha vv^T = I + (3\alpha - 1)\, vv^T.$$

Para que esta matriz sea la identidad α tiene que valer 1/3. Las propiedades que se están usando en cada paso son: (1) Propiedad Distributiva del producto respecto de la suma de matrices, (2) Propiedad Asociativa del producto, hemos cambiado los paréntesis:

$$\left(vv^T\right)\left(vv^T\right) = v\underbrace{\left(v^Tv\right)}_{=4}v^T = 4vv^T.$$

Si A fuese una matriz como la del enunciado, pero de orden n entonces el valor de α sería $1/(n-1)$.

3. La matriz vv^T tiene rango 1 y nulidad 3. Eso quiere decir que existen tres vectores linealmente independientes que verifican $Bv = 0$, por tanto son autovectores para el autovalor 0. Por lo tanto el autovalor 0 es al menos triple. Como la traza de B es 4, el autovalor que falta tiene que ser 4 y el autovalor 0 tiene que ser triple porque tiene que haber exactamente cuatro autovalores. También se podría haber usado el hecho de que todas las columnas de B suman 4.

4. Como $A = vv^T - I$ usamos las propiedades generales de autovalores y autovectores para deducir que los autovalores de A son los de vv^T desplazados una unidad hacia la izquierda (-1). Por lo tanto son $\lambda_1 = 3$ (simple) y $\lambda_1 = -1$ (triple). Las multiplicidades geométricas son iguales a las algebraicas porque A es simétrica real, por tanto es diagonalizable.

5. En la sección "Propiedades Generales de los Autovalores" se ha demostrado que las matrices A, $A^2 - 3A - I$ y $\left(A^2 - 3A - I\right)^{-1}$ tienen los mismos autovectores. Como A es simétrica real, la matriz P se puede conseguir ortogonal. Si λ es autovalor de A entonces $\lambda^2 - 3\lambda - 1$ y $\left(\lambda^2 - 3\lambda - 1\right)^{-1}$ son los respectivos autovalores de $A^2 - 3A - I$ y $\left(A^2 - 3A - I\right)^{-1}$. Por lo tanto los autovalores de $\left(A^2 - 3A - I\right)^{-1}$ son

$$\lambda = -1 \to \left(\lambda^2 - 3\lambda - 1\right)^{-1} = 1/3 \text{ (triple)},$$

$$\lambda = 3 \to \left(\lambda^2 - 3\lambda - 1\right)^{-1} = -1 \text{ (simple)}.$$

Los autovectores los calculamos directamente desde la matriz A:

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \underset{\text{Gauss}}{\to} v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Los autovectores asociados al autovalor triple no son ortogonales. Para conseguir autovectores ortogonales aplicamos el método de Gram-Schmidt:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente las matrices obtenidas son (para que se verifique $P^{-1} = P^T$ tenemos que normalizar los autovectores):

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} & 1/2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3.

1. [3 pto] Calcule la recta de regresión $Ry/x \equiv y = a_r x + b_r$ para los puntos $\{(0,2),(1,1),(2,2)\}$.
2. [2 pto] Calcule la recta de regresión $Rx/y \equiv x = \alpha_r y + \beta_r$ para los mismos puntos.
3. [1 pto] Represente gráficamente los resultados. Hay un punto común entre ambas rectas: compruebe que coincide con el centro de gravedad (o la media aritmética que es lo mismo).
4. [4 pto] Determine los puntos (a,b) tales que al añadir el punto (a,b) a la nube de puntos, la nueva recta de regresión Ry/x sea $y = x - 1$.

Solución. Los tres primeros apartados de un ejercicio similar están resueltos en los apuntes de la asignatura. No mostramos aquí el proceso de cálculo, sólo las soluciones.

1. $a_r = 0$, $b_r = 5/3$.
2. $\alpha_r = 0$, $\beta_r = 1$.
3. El centro de gravedad es $(1, 5/3)$.
4. Los coeficientes a_r y b_r se obtienen como solución en mínimos cuadrados de un cierto sistema. Imponemos que $(1,-1)$ sea la solución en mínimos cuadrados de dicho sistema. Para ello obtenemos las ecuaciones normales de Gauss cuya matriz ampliada es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ a & 1 & b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} a^2+5 & a+3 & ab+5 \\ a+3 & 4 & b+5 \end{array}\right].$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} a^2+5 & a+3 \\ a+3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+5 \\ b+5 \end{bmatrix}.$$

Se deduce que a y b verifican el sistema

$$\begin{cases} a^2 - a = ab + 3, \\ b = a - 6. \end{cases}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera se obtiene $a = 3/5$, $b = -27/5$.

Ejercicio 4. Consideremos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. [3 pto] Calcule los autovalores y autovectores de A.
2. [3 pto] Calcule la forma canónica de Jordan J y una matriz de paso P tales que $A = PJP^{-1}$.
3. [4 pto] Calcule una descomposición en valores singulares de la matriz formada por las tres primeras columnas de la matriz del Ejercicio 2.

Solución.

1. Calculamos el polinomio característico de A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left\{\lambda^2 - 4\lambda + 4\right\} = 0.$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 16}}{2} = \{2 \text{ (doble)}\}.$$

Los autovalores de A son $\{2 \text{ (doble)}, 4 \text{ (simple)}\}$. Calculamos autovectores:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz no es diagonalizable.

2. El teorema de Jordan nos asegura que esta matriz es semejante a

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para calcular la matriz de paso $P = [v_1, v_2, v_3]$ imponemos la igualdad $AP = PJ$. Igualando las matrices por columnas queda

$$Av_1 = 2v_1,\ Av_2 = v_1 + 2v_2,\ \ Av_3 = 4v_3.$$

Como vectores v_1 y v_3 tomamos los autovectores anteriormente calculados. Para calcular v_2 resolvemos el sistema no homogéneo

$$(A - 2I)\, v_2 = v_1 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\text{Gauss}}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3/2 \end{array}\right].$$

Observamos que la variable x_3 es libre, le podemos dar el valor 0 pues el sistema es no homogéneo. La matriz de paso que hemos obtenido es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Extraemos las tres primeras columnas de la matriz del ejercicio 2 para obtener

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obtener una descomposición en valores singulares de A calculamos $A^T A$ (tenga en cuenta que AA^T es de orden 4):

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz se calculan fácilmente porque todas sus columnas suman 7:

$$\det\left(A^T A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 7-\lambda & 7-\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Se ve claro que los autovalores son $\lambda_1 = 7$ (simple) y $\lambda_2 = 1$ (doble). Por lo tanto los valores singulares son $\sigma_1 = \sqrt{7}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$. Calculamos los autovectores de $A^T A$:

$$A^T A - 7I = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \underset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^T A - I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Aplicamos el método de Gram-Schmidt para conseguir autovectores ortogonales (es lo mismo que ocurrió en el ejercicio 2):

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

La descomposición en valores singulares es

$$A = \sqrt{7} u_1 v_1^T + u_2 v_2^T + u_3 v_3^T$$

donde los vectores ya normalizados son

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u_3 = \frac{1}{\sigma_3} A v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente la descomposición que se pide es

$$A = \underbrace{\sqrt{7}}_{\sigma_1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{u_1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T}_{v_1^T} + \underbrace{1}_{\sigma_2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_2^T} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T}_{v_2^T} + \underbrace{1}_{\sigma_3} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_3^T} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T}_{v_3^T}.$$